哥巴赫猜想的证明

知乎用户 **@ 证明**

January 1, 2019

思路：有借有还，再借不难；分类讨论，逐一判断

1 准备

- 设集合 *A* 为所有满足两个质数之和的偶数的集合，且此时质数包括正质数和负质数
- 设集合 *B* 为所有满足两个质数之和的偶数的集合，且此时质数只包括正质数
- $\forall$ 任意大于等于 4 的偶数
  均可以表示为 $(6k-2), 6k, (6k+2)$ 中的一种，其中 $k \in \mathbb{N}_+$
- 约定全体素数集为 $\mathbb{P}$，且有 $k \in \mathbb{N}_+$

目的：证明 $\forall n \in \mathbb{N}_+$ 且 $n \geq 2$ 则 $2n \in B$

2 证明

1 $\because 2 = (-1) + 3$
$\therefore$ 得到一个新猜想，即

$$\forall n \in \mathbb{N}_+, 2n \in B \tag{1}$$

或

$$2n = (-1) + (2n+1), 2n+1 \in \mathbb{P} \tag{2}$$

将其称为哥德巴赫猜想变式一

如果把 -1 归到质数集中，可得命题：

若 -1 是质数，则 $\forall n \in \mathbb{N}_+, 2n \in A$，且 -1 为唯一的负质数

这个命题的逆否命题为：

若 $\exists n_0 \in \mathbb{N}_+, 2n_0 \notin A$，则 -1 不是质数

当 $n_0 = 1$ 时，若 $2 \notin A$，则 -1 不是质数：这是一个真命题，所以该存在命题是真命题

由于原命题和其逆否命题具有等价关系，所以原命题是真命题，哥德巴赫猜想变式一正确

令 $2n = 6k + 2$，则有 $6k + 2 \in B$ 或 $6k + 2 = -1 + (6k + 3), (6k + 3) \in \mathbb{P}$ 成立。显然 $6k + 3 = 3(2k + 1) \notin \mathbb{P}$，从而有 $6k + 2 \in B$

2 $\because 2 = (-3) + 5$，又可以提出另一个猜想：

$$\forall n \in \mathbb{N}_+, 2n \in B \tag{3}$$

或

$$2n = -3 + (2n + 3), 2n + 3 \in \mathbb{P} \tag{4}$$

成立，将其称为哥德巴赫猜想变式二

如果把 -3 归到质数的集合中，可得命题：

若 -3 是质数，则 $\forall n \in \mathbb{N}_+, 2n \in A$，且 -3 为唯一的负质数

这个命题的逆否命题为：

若 $\exists n_0 \in \mathbb{N}_+, 2n_0 \notin A$，则 -3 不是质数

当 $n_0 = 1$ 时，若 $2 \notin A$，则 -3 不是质数：这是一个真命题，所以该存在命题是真命题

由于原命题和其逆否命题具有等价关系，所以原命题是真命题，哥德巴赫猜想变式二正确

令 $2n = 6k$，则有 $6k \in B$ 或 $6k = -3 + (6k + 3)$,$(6k + 3) \in \mathbb{P}$ 成立。显然 $6k + 3 = 3(2k + 1) \notin \mathbb{P}$，从而有 $6k \in B$。

3 同理可证 $\forall n \in \mathbb{N}_+$,$2n \in B$ 或 $2n = -5 + (2n + 5)$,$2n + 5 \in \mathbb{P}$ 成立。取 $2n = 6k - 2$，同理可得 $6k - 2 \in B$

4 由于 $6k - 2, 6k, 6k + 2 \in B$ 且 $k \in \mathbb{N}_+$，故 $\forall n \in \mathbb{N}_+$ 且 $n \geq 2$，$2n \in B$，从而哥德巴赫猜想正确